## SÈRIE 3

### 1.

(a) La funció $f(x)$ és polinòmica i, per tant, contínua en tots els reals. Com que

$$f(-2) = 3 \cdot (-2)^{13} + 5 \cdot (-2)^3 + 2 < 0,$$

$$f(0) = 3 \cdot (0)^{13} + 5 \cdot (0)^3 + 2 > 0.$$

podem aplicar el Teorema de Bolzano i la funció $f(x)$ s'anul·la forçosament en algun punt de l'interval $[-2, 0]$. Per trobar un interval de longitud 0.5 només cal temptejar uns quants intervals més petits; com que

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^{13} + 5 \cdot (-1)^3 + 2 = -6 < 0,$$

l'arrel pertany a l'interval $[-1, 0]$. I, finalment, com que

$$f(-0.5) = 3 \cdot (-0.5)^{13} + 5 \cdot (-0.5)^3 + 2 = 1.374 \ldots > 0,$$

l'arrel pertany a l'interval $[-1, -0.5]$.

(b) Per analitzar el creixement i decreixement de la funció $f(x)$, calculem la seva derivada $f'(x) = 39x^{12} + 15x^2$: com que tots els exponents són parells, $f'(x)$ mai és negativa i, per tant, la funció $f$ mai decreix. En particular, no té cap màxim ni mínim. Per altra banda, la funció, que és polinòmica, no té asímptotes ni discontinuïtats. En definitiva, la seva gràfica només pot tenir un únic punt de tall amb l'eix d'abscisses que es troba, com hem dit, a l'interval $[-1, -0.5]$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.25 per justificar que es pot aplicar el Teorema de Bolzano, 0.5 per veure que hi ha una arrel a l'interval $[-2, 0]$ i 0.5 per afinar fins a un interval de cinc dècimes d'amplada. (b) Compteu 0.25 pel càlcul de la derivada, 0.25 per deduir que es tracta d'una funció creixent, 0.25 per dir que no té màxims ni mínims, i 0.5 per justificar que hi ha una única arrel.

**2.**

(a) El determinant de la matriu de coeficients del sistema és

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & m \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2m + m - 6 - m^2 - 2 + 6 = -m^2 + 3m - 2,$$

que és 0 quan $m = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4(-1)(-2)}}{-2} = 1, 2$. Si $m$ no és ni 1 ni 2, el rang de la matriu de coeficients és 3, per tant el de l'ampliada també, i es tracta d'un sistema compatible determinat.

En el cas $m = 1$, el rang de la matriu de coeficients és 2 (ja que, per exemple, el menor superior esquerra és no nul) i el de l'ampliada és 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 9 + 2 - 3 + 3 = -8 \neq 0.$$

Per tant, es tracta d'un sistema incompatible. (Alternativament observem que les dues darreres equacions són contradictòries en aquest cas: $x + y + 2z = 3$ i $x + y + 2z = 1$.)

En el cas $m = 2$, el rang de la matriu de coeficients és 2 i el de l'ampliada també és 2,

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per tant, es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

(b) Si $m = 0$ és un sistema compatible determinat i té per solució

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 0 + 0 - 0 + 4 + 18}{0 + 0 - 6 - 0 - 2 + 6} = \frac{22}{-2} = -11,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6 + 0 - 4 - 0 - 0 + 4}{-2} = \frac{6}{-2} = -3,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0-2-9-0-3-0}{-2} = \frac{-14}{-2} = 7.$$

(c) Per $m = 2$ sabem que el sistema és equivalent a les dues equacions $x - 3y + 2z = -2$, i $y = 1$, i és compatible indeterminat. Imposant, a més a més, la condició extra $x = 5y$, tenim $x = 5$ i, de la primera equació, $2z = -2 - x + 3y = -2 - 5 + 3 = -4$, és a dir, $z = -2$. Així la solució demanada és $(x, y, z) = (5,1,-2)$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.25 pel càlcul del determinant, 0.25 per trobar els valors crítics de $m$, i 0.25 per l'estudi de cadascun dels tres casos. (b) Compteu 0.5 pel càlcul de la solució. (c) Compteu 0.25 per saber combinar el sistema amb la condició extra, i 0.5 pel càlcul de la solució demanada.

Comentaris: El sistema es pot discutir i es pot resoldre de maneres alternatives. Compteu-ho bé en la mesura que el que facin sigui correcte i estigui convenientment justificat.

**3.**

(a) El punt $A$ és un punt de tall de $y = f(x)$ amb l'eix $OX$:

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \longrightarrow x(x-2)^2 = 0 \longrightarrow x = 0, \ \ x = 2.$$

Per tant, el punt $A$ té per coordenades $A = (2,0)$. El punt $D$ és un punt de tall de $y = g(x)$ amb l'eix $OX$:

$$-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 = 0 \longrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \longrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-15)}}{2} = -3, \ \ 5.$$

Descartem la solució negativa i podem afirmar, per tant, que el punt $D$ té coordenades $D = (5,0)$. Finalment, el punt $B$ és el punt de tall de $y = g(x)$ amb l'eix $OY$; com que

$$g(0) = -\left(\frac{0-1}{2}\right)^2 + 4 = \frac{15}{4},$$

es tracta del punt $B = \left(0, \frac{15}{4}\right)$. Les coordenades del punt $C$ ja ens les dóna l'enunciat, $C = \big(3, f(3)\big) = \big(3, g(3)\big) = (3,3)$.

(b) La zona puntejada és l'àrea compresa entre $g(x)$ i $f(x)$ des de $x = 0$ fins a $x = 3$:

$$A_1 = \int_0^3 \left(-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 - (x^3 - 4x^2 + 4x)\right) dx = \int_0^3 \left(\frac{-4x^3 + 15x^2 - 14x + 15}{4}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 15x\right]_0^3 = 9 \ \ u^2.$$

(c) Sabent que l'àrea total del logotip és de $\frac{175}{12} = 14.583 \ldots u^2$, la zona ratllada tindrà àrea $14.583 \ldots - 9 = 5.583 \ldots u^2$. Per tant, per pintar el logotip de la manera que volen, els caldrà més pintura blava que vermella.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.25 pel càlcul de cadascun dels tres punts demanats. (b) Compteu 0.5 pel plantejament de l'àrea de la zona puntejada (amb els límits d'integració correctament col·locats), 0.5 per la primitiva, i 0.25 pel càlcul final. (c) 0.5 per la resposta correcta.

**4.**

(a) Sigui $A$ l'esdeveniment *"patir arrítmia"*. De l'enunciat sabem que $P(A) = 0.2$. D'entre les 4 escollides, el nombre de persones $N$ que pateix arrítmies segueix una distribució binomial amb paràmetres $n = 4$ i $p = 0.2$. Passant al complementari, obtenim

$$P(N \geq 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - (1 - 0.2)^4 = 0.5904.$$

(b) Sigui $H$ l'esdeveniment *"obtenir diagnòstic positiu d'arrítmia a la prova del Holter"*. Siguin $\bar{A}\ i\ \bar{H}$ els esdeveniments complementaris a $A$ i a $H$, respectivament. Aleshores, de les dades de l'enunciat deduïm:

$$P(\bar{A}) = 0.8, \quad P(H \mid A) = 0.95 \quad \text{i} \quad P(H \mid \bar{A}) = 0.005.$$

Podem aplicar la fórmula de la probabilitat total:

$$P(H) = P(H \mid A) \cdot P(A) + P(H \mid \bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0.95 \cdot 0.2 + 0.005 \cdot 0.8 = 0.194.$$

(c) Per calcular la probabilitat condicionada que se'ns demana, farem servir la fórmula de Bayes:

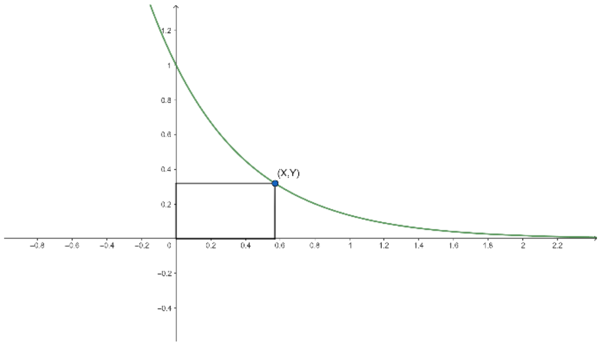
$$P(A \mid \bar{H}) = \frac{P(A \cap \bar{H})}{P(\bar{H})} = \frac{P(A) \cdot P(\bar{H} \mid A)}{1 - P(H)} = \frac{0.2 \cdot (1 - 0.95)}{1 - 0.194} = 0.012 \ldots .$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.5 pel plantejament i 0.25 pel càlcul. (b) Compteu 0.5 pel plantejament amb la fórmula de les probabilitats totals (o un arbre de decisió) i 0.25 pel càlcul. (c) Compteu 0.5 pel plantejament de la fórmula de Bayes (o de la probabilitat condicionada), i 0.5 pel càlcul.

A l'apartat (a) seria també correcte el càlcul (més llarg) de la probabilitat que $N$ sigui 1,2,3,4, és a dir, $P(N = 1) + P(N = 2) + P(N = 3) + P(N = 4)$, amb la binomial. Compteu la màxima puntuació si el fan així de manera correcta i argumentada.

**5.**

(a) La gràfica de la funció $y = e^{-2x}$ està esbossada en el dibuix següent, juntament amb un dels rectangles descrits a l'enunciat:




Com que un qualsevol d'aquests rectangles mesura $x$ de base i $e^{-2x}$d'alçada, la seva àrea és $A(x) = xe^{-2x}$. Busquem els extrems relatius d'aquesta funció:

$$A'(x) = e^{-2x} + xe^{-2x}(-2) = e^{-2x}(1-2x) = 0 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

A partir del signe de la funció derivada es veu clarament que $A(x)$ és creixent per a $x < \frac{1}{2}$ i decreixent per a $x > \frac{1}{2}$. Per tant, el punt $x = \frac{1}{2}$ és un màxim absolut de $A(x)$. Així, el rectangle d'àrea màxima correspon al de costats $x = \frac{1}{2}$ i $y = e^{-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{e}$, i té àrea $A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}\ u^2$.

(b) La derivada d'aquesta funció és $y' = -2e^{-2x}$. El pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa 0 és $y'(0) = -2e^0 = -2$. Com que $y(0) = e^0 = 1$, la recta tangent serà la d'equació $y - 1 = -2(x - 0)$, és a dir, $y = -2x + 1$. El punt de tall d'aquesta recta amb l'eix d'abscisses és $x = \frac{1}{2}$, és a dir, el punt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.25 per escriure la funció àrea, 0.25 per derivar-la, 0.25 per trobar el punt crític, 0.5 per justificar que es tracta d'un màxim, i 0.25 per calcular l'àrea màxima. (b) Compteu 0.25 pel càlcul de la derivada, 0.5 per l'equació de la recta tangent, i 0.25 pel punt de tall.

Comentaris: La justificació del màxim es pot fer també via derivada segona. Compteu bé qualsevol de les maneres de fer-ho, en la mesura que siguin correctes i estiguin ben explicades.

**6.**

(a) Per ser perpendicular a $\pi$, la recta $r$ tindrà com a vector director $\vec{v} = (1,2,-2)$. I, com que ha de passar per $P = (1,3,0)$, es tracta de la recta $(x, y, z) = (1,3,0) + \lambda(1,2,-2) = (1 + \lambda, 3 + 2\lambda, -2\lambda)$. Imposant l'equació del pla $\pi$, obtenim

$$1 + \lambda + 2(3 + 2\lambda) - 2(-2\lambda) = -7,$$

$$9\lambda + 7 = -7,$$

és a dir, $\lambda = -\frac{14}{9}$. Això correspon al punt $Q = \left(1 - \frac{14}{9},\ 3 - \frac{28}{9},\ \frac{28}{9}\right) = \left(\frac{-5}{9},\ \frac{-1}{9},\ \frac{28}{9}\right)$.

(b) Com que el punt $Q$ que hem calculat és la projecció ortogonal de $P$ sobre el pla $\pi$, la distància demanada és

$$d(P, \pi) = d(P, Q) =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-5}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{-1}{9} - 3\right)^2 + \left(\frac{28}{9} - 0\right)^2} = \frac{1}{9}\sqrt{14^2 + 28^2 + 28^2} = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}.$$

Alternativament, la podem calcular amb la fórmula de la distància punt-pla:

$$d(P, \pi) = \frac{|1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{14}{3}.$$

(c) Per ser paral·lel, $\pi'$ haurà de tenir equació de la forma $x + 2y - 2z = D$. I imposant que la distància a $P = (1,3,0)$ també sigui de $\frac{14}{3}$ obtenim

$$\frac{14}{3} = d(P, \pi') = \frac{|1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 - D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|7 - D|}{3},$$

és a dir, $|7 - D| = 14,\ \ 7 - D = \pm 14,\ \ D = 7 \mp 14 = \begin{cases} -7 \\ 21 \end{cases}$. El valor $D = -7$ correspon al pla $\pi$ que ja coneixem, i l'altre pla $\pi'$ demanat serà el d'equació $x + 2y - 2z = 21$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.5 per la parametrització de la recta $r$, 0.25 per imposar l'equació del pla $\pi$, i 0.25 pel càlcul final. (b) Compteu 0.5 pel càlcul de la distància (per qualsevol dels dos mètodes). (c) Compteu 0.5 per imposar l'equació (amb el valor absolut tractat correctament), i 0.5 per aïllar $D$ i donar la resposta.

Comentaris: L'apartat (a) es pot fer també trobant primer l'equació cartesiana de la recta $r$ i després fent el sistema d'equacions amb el pla $\pi$. Compteu-ho bé, en la mesura que el que facin sigui correcte i estigui ben explicat.