SÈRIE 5

1.

a)

Com que es tracta d'una funció contínua a l'interval $[1, 1.5]$ i $f(1) = -2 < 0$ i $f(1.5) = -2 + 5\ln 1.5 = \ 0.027 \ldots > 0$, el Teorema de Bolzano ens assegura que hi ha una arrel a l'interval $(1, 1.5)$. Temptejant altres punts d'aquest interval, veiem que $f(1.3) = -2 + 3\ln 1.3 = -1.212 \ldots < 0$, per tant, l'arrel està a l'interval $[1.3, 1.5]$. I també $f(1.4) = -2 + 4\ln 1.4 = -0.654 \ldots < 0$ i, per tant, l'arrel està a l'interval $[1.4, 1.5]$.

b)

Calculem la derivada $f'(x) = 10\left(\ln x + \frac{x-1}{x}\right)$ i observem que, d'entrada, no sabem aïllar la x de l'equació $f'(x) = 0$. Però es veu clarament que a l'interval $(0,1)$ tenim $\ln x < 0$ i $\frac{x-1}{x} < 0$ per tant, $f'(x) < 0$ i la funció serà decreixent. De la mateixa manera, a l'interval $(1, +\infty)$ tenim $\ln x > 0$ i $\frac{x-1}{x} > 0$ per tant, $f'(x) > 0$ i la funció serà creixent. En conseqüència, $f(x)$ té un únic punt crític al punt $x = 1$, que és mínim, i no té cap màxim.

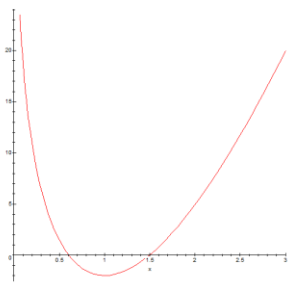
c)

Els dos límits demanats són immediats:

$$\lim_{x \to 0^+} (-2 + 10(x-1)\ln x) = -2 + 10(-1)(-\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} (-2 + 10(x-1)\ln x) = -2 + 10 \cdot (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Tenint en compte totes aquestes dades, la gràfica d'aquesta funció és



Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 per justificar que té una arrel a l'interval $[1, 1{,}5]$ i 0,5 per afinar-lo a una dècima (no importa si fan més o menys temptejos fins arribar a la dècima, mentre siguin correctes). (b) Compteu 0,25 pel càlcul de la derivada, 0,5 per l'estudi del creixement i decreixement, i 0,25 pels màxims i mínims. (c) Compteu 0,25 per cada límit i 0,25 per l'esbós de la gràfica (no s'ha de precisar els talls amb l'eix d'abscisses perquè no s'han calculat, però sí que s'ha de notar que un d'ells està situat entre 1,4 i 1,5).

2.

a)

Calculem el determinant de P:

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 - (-1 + 0 + 2) = 1.$$

Com que és diferent de zero, la matriu P és invertible i la seva inversa és

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}(Adj\ P)^t = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t == \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b)

La matriu X la podem trobar aïllant-la de l'equació lineal:

$$PX + Q = 2R,$$

$$PX = 2R - Q,$$

$$P^{-1}PX = P^{-1}(2R - Q),$$

$$X = P^{-1}(2R - Q) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\left(2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -8 & -8 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 pel determinant, 0,25 per deduir que P és invertible, i 0,5 pel càlcul de la inversa. (b) Compteu 0,5 per aïllar correctament la X

(compteu 0 si multipliquen la P^{-1}pel costat equivocat), i 0,75 pels càlculs i el resultat final.

Comentaris: En cadascun dels apartats, si donen directament el resultat final sense indicar/explicar els passos seguits, compteu 0 punts encara que el resultat sigui correcte (d'aquest problema es pot trobar la resposta amb la calculadora sense entendre res, per això l'enunciat demana explícitament detallar el procediment seguit). Alternativament, la inversa pot calcular-se també pel mètode de Gauss. I, tot i que és més llarg, poden trobar la matriu X plantejant-la amb nou incògnites i buscant-les directament, resolent l'equació corresponent casella per casella. Compteu bé si usen aquests altres mètodes, en la mesura que el que facin sigui correcte i estigui ben explicat.

3.

a)

La derivada és $f_a'(x) = 2ax + 2$ i el pendent en el punt d'abscissa $x = 1$ és $f_a'(1) = 2a + 2$. Com que el punt de tangència és $\big(1, f_a(1)\big) = (1,7)$, l'equació de la recta tangent serà $y - 7 = (2a + 2)(x - 1)$. Per tal que aquesta recta passi pel punt $(2, 13)$ cal que $13 - 7 = (2a + 2)(2 - 1)$, és a dir, $6 = 2a + 2$ i, per tant, $a = 2$.

(b) Per trobar els punts de tall d'aquestes dues paràboles, hem de resoldre l'equació de segon grau $f_1(x) = f_3(x)$:

$$x^2 + 2x + 4 = 3x^2 + 2x + 2 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1.$$

Els punts de tall són $\big(1, f_1(1)\big) = (1, 7)$ i $\big(-1, f_1(-1)\big) = (-1, 3)$.

c)

L'àrea demanada és la integral

$$A = \int_{-1}^{1} \big(f_1(x) - f_3(x)\big)\, dx = \int_{-1}^{1} \big((x^2 + 2x + 4) - (3x^2 + 2x + 2)\big)\, dx =$$

$$\int_{-1}^{1} (-2x^2 + 2)\, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{1} = \left(-\frac{2}{3} + 2\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{8}{3}\, u^2.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 per la derivada, 0,25 per calcular l'equació de la recta tangent en funció del paràmetre, 0,25 per plantejar l'equació, i 0,25 pel valor final. (b) Compteu 0,25 pel planteig de l'equació correcta i 0,25 per donar els dos punts de tall. (c) Compteu 0,5 per plantejar la integral correcta, i 0,5 per calcular-la (si plantegen la integral de $f_3(x) - f_1(x)$ i els surt un resultat negatiu, cal que expliquin què passa i que prenguin el valor absolut com a resultat; si donen per bo un resultat negatiu, penalitzeu amb 0,5 punts).

4.

a)

Denotem per C l'esdeveniment "la solució és correcta", per R l'esdeveniment "l'ha resolt la Rut", i per I l'esdeveniment "l'ha copiat d'Internet". Segons l'enunciat, $P(R) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(I) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(C \mid R) = 0.75$, i $P(C \mid I) = 0.4$. Aleshores, per la llei de les probabilitats totals,

$$P(C) = P(C \mid R)P(R) + P(C \mid I)P(I) = 0.75 \cdot \frac{2}{3} + 0.4 \cdot \frac{1}{3} = 0.633 \dots .$$

b)

Fent servir la fórmula de Bayes i els càlculs de l'apartat anterior, obtenim

$$P(R \mid C) = \frac{P(C|R)P(R)}{P(C)} = \frac{0.75 \cdot \frac{2}{3}}{0.633} = 0.789\dots .$$

c)

El nombre d'exercicis correctes segueix una distribució binomial amb $p = P(C) = 0.633$ i $n = 5$.

$$P(almenys\ 4\ correctes) = P(4\ correctes) + P(5\ correctes) =$$

$$= \binom{5}{4} \cdot 0.633^4 \cdot (1 - 0.633)^1 + \binom{5}{5} \cdot 0.633^5 = 0.396 \dots$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 per plantejar la llei de les probabilitats totals (o per fer l'arbre de decisió), i 0,25 pel càlcul final. (b) Compteu 0,5 per plantejar correctament la fórmula de Bayes (o usar la definició de probabilitat condicionada), i 0,25 pel càlcul final. (c) Compteu 0,5 pel plantejament i 0,5 pel càlcul final.

5.

a)

Tal com s'indica a la figura, el radi de la semicircumferència superior és x, i el de la lateral y. Per tant, el perímetre de la figura serà

$$P(x,y) = 2x + 2y + \frac{2\pi x}{2} + \frac{2\pi y}{2} = (2+\pi)(x+y),$$

i la seva àrea

$$A(x,y) = \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi y^2}{2} + 4xy.$$

b)

Com que volem $P(x,y) = (2+\pi)(x+y) = 10$, tenim $y = \frac{10}{2+\pi} - x$. Substituint a l'expressió de l'àrea, obtenim:

$$A(x) = \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{10}{2+\pi} - x\right)^2 + 4x\left(\frac{10}{2+\pi} - x\right) =$$

$$= \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{10}{2+\pi} - x\right)^2 + \frac{40x}{2+\pi} - 4x^2.$$

Derivant i igualant a zero, obtenim

$$A'(x) = \pi x - \pi\left(\frac{10}{2+\pi} - x\right) + \frac{40}{2+\pi} - 8x = 0$$

$$(2\pi - 8)x = \frac{10\pi - 40}{\pi + 2}$$

$$x = \frac{10\pi - 40}{(\pi+2)(2\pi - 8)} = 0.972 \ldots\ m.$$

Ara comprovem que és un màxim, veient que $A'' = 2\pi - 8 < 0$. Per tant, el decorat de la màxima àrea possible és un quadrat de dimensions $x = 0.972 \ldots m$, i $y = \frac{10}{2+\pi} - x = 0.972 \ldots m$.

Finalment, el valor d'aquesta àrea màxima és $A(0.972) = 6.747 \ldots\ m^2$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 per l'expressió del perímetre, i 0,5 per la de l'àrea (no importa si el resultat el donen més o menys simplificat). (b) Compteu 0,5 per l'expressió de la funció a derivar, 0,25 per la derivada, 0,25 per la solució, 0,25 per comprovar que és un màxim, i 0,25 per la resposta final.

6.

a)

La recta r té vector director $(4,3,-1)$ i la recta s (2,1,0). No són proporcionals, per tant, les rectes es creuen o es tallen. Donat que aquest determinant és diferent de zero

$$\begin{vmatrix} 5-4 & 4-3 & 3-(-1) \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+16-2-24+1-0 = -9 \neq 0,$$

les rectes r i s es creuen.

Per ser paral·lel a les dues rectes, el pla π té la direcció formada pels seus dos vectors directors; com que, a més, ha de passar pel punt $(0,0,0)$, la seva equació implícita serà

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+4z-2y-6z+x-0 = x-2y-2z = 0.$$

b)

Si partim del vector normal del pla π de l'apartat anterior, $v=(1,-2,-2)$, que és perpendicular a ambdues rectes, podem calcular l'equació del pla π_1 que conté el vector v i la recta r,

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-4 & z-3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -6(x-5)-8(z-3)-(y-4)-3(z-3)-2(x-5)+$$

$$+8(y-4) = -8x+7y-11z+45 = 0,$$

i l'equació del pla π_2 que conté el vector v i la recta s,

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z+1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2(x-4)-4(z+1)+0-(z+1)-0+4(y-3) =$$
$$= -2x+4y-5z-9 = 0.$$

La recta t que busquem és la que té per equació

$$\left.\begin{array}{r} 8x-7y+11z=45 \\ 2x-4y+5z=-9 \end{array}\right\}.$$

Alternativament, podem prendre un punt genèric de la recta r, que és de la forma $R = (5,4,3) + \lambda(4,3,-1)$, i un punt genèric de s, que és de la forma $S = (4,3,-1) + \mu(2,1,0)$, i imposar que el vector

$$\overrightarrow{RS} = (4 + 2\mu, 3 + \mu, -1) - (5 + 4\lambda, 4 + 3\lambda, 3 - \lambda) =$$

$$= (-4\lambda + 2\mu - 1, \qquad -3\lambda + \mu - 1, \qquad \lambda - 4)$$

sigui perpendicular als vectors directors respectius, $(4,3,-1)$ i $(2,1,0)$, de les rectes r i s. Obtenim el sistema d'equacions

$$4(-4\lambda + 2\mu - 1) + 3(-3\lambda + \mu - 1) - (\lambda - 4) = -26\lambda + 11\mu - 3 = 0,$$

$$2(-4\lambda + 2\mu - 1) + 1(-3\lambda + \mu - 1) + 0(\lambda - 4) = -11\lambda + 5\mu - 3 = 0.$$

Resolent-lo, obtenim $\lambda = 2$ i $\mu = 5$, que ens donen els punts buscats $R = (13, 10, 1) \in r$ i $S = (14, 8, -1) \in s$. Efectivament el vector $\overrightarrow{RS} = (1, -2, -2)$ és perpendicular a r i a s (és el vector normal del pla de l'apartat anterior) i l'equació de la recta t que passa per aquests dos punts és

$$\frac{x - 13}{1} = \frac{y - 10}{-2} = \frac{z - 1}{-2}.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 per la discussió de la posició relativa i 0,75 per l'equació del pla demanat. (b) Compteu 0,5 pel planteig, i 0,75 per l'equació de la recta perpendicular (ja sigui fet d'una manera o de l'altra... o de qualsevol altra forma mentre sigui correcta i estigui ben explicada).