

SÈRIE 1

Criteris generals per a la correcció:

1. Les respostes s'han d'ajustar a l'enunciat de la pregunta. En general, es valorarà que l'alumne mostri que té clars els conceptes matemàtics sobre els quals tracta cada pregunta.
2. La resolució correcta d'un exercici no pot ser simplement un seguit de càlculs més o menys amuntegats; cal que l'alumne expliqui el que està fent i que acompanyi els càlculs amb comentaris per demostrar que entén el que està fent. Es tindrà en compte la claredat en l'exposició dels conceptes, la descripció dels processos, i els passos a seguir, així com la no confusió d'hipòtesis amb conclusions, l'ordre lògic dels raonaments i la contextualització segons l'enunciat.
Totes les respostes s'han de raonar i justificar. Una resposta correcta sense raonament ni justificació pot ser valorada amb un 0, si el corrector no és capaç de veure d'on ha sortit el resultat.
3. La resolució que es proposa en aquestes pautes és, en molts casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, si l'estudiant presenta una resolució alternativa, encara que sigui diferent, es comptarà com a totalment vàlida en la mesura que sigui correcta i estigui convenientment justificada. Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
4. En alguns casos, la solució final de cada apartat pot admetre expressions equivalents; totes es comptaran igualment com a vàlides, a menys que se'n demani una de manera explícita a l'enunciat.
5. Aquestes pautes descriuen com repartir la puntuació assignada de cada apartat a les diferents tasques demanades per aquest (en múltiples de 0,25 punts). La valoració final de cada apartat serà la suma de les parts que l'alumne hagi fet correctament menys la penalització que s'hi hagi d'aplicar d'acord amb les indicacions següents (amb el benentès que cap apartat es pot valorar amb una puntuació negativa).
6. Cal indicar/explicar tots els passos de cada càlcul o argumentació fins arribar a la resposta. Es poden fer els càlculs finals amb calculadora (i donar el resultat final aproximat amb decimals) sempre i quan l'alumne deixi clares les operacions que està fent; en cas contrari, es penalitzarà 0,25 punts del valor total de l'apartat. (per exemple, si dona directament la solució d'un sistema de equacions sense fer cap càlcul).



Proves d'accés a la Universitat 2024, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació

7. Penalització per errades de càlcul o de transcripció:

- a) Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores no es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
- b) En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.
- c) En cas que l'errada condueixi a alguna incoherència o a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, sense que l'alumne ho reconegui, aleshores s'aplicarà una penalització de 0,5 punts.
- d) Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà, com a màxim, l'acumulada fins al moment previ a cometre la segona errada.
- e) En el cas que l'error sigui inacceptable (per exemple, simplificar $\sqrt{x^2 + y^2}$ com $x + y$, ó $\frac{a+b}{a+c}$ com $\frac{b}{c}$) s'avaluarà tot l'apartat amb un zero.



PAUTES DE CORRECCIÓ

1.

a)

[1 punt]

Derivant i igualant a zero,

$$f'(x) = 2 \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0,$$

ens queda l'equació $\ln x = 1$; per tant, f té només un punt crític, $x = e$. Resulta que és un màxim ja que la derivada segona és negativa:

$$f''(x) = 2 \frac{-\frac{1}{x^2}x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4}, \quad f''(e) = 2 \frac{-e}{e^4} = -2e^{-3} < 0.$$

Com que només té un màxim, la funció és creixent a l'interval $(0, e)$ i decreixent a $(e, +\infty)$, cosa que també podem veure directament mirant el signe de la derivada.

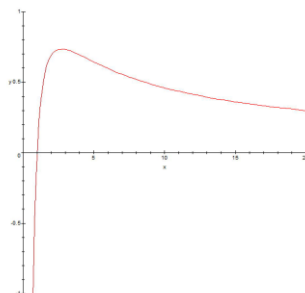
b)

[1 punt]

A zero, hi ha una asymptota vertical, ja que $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{\ln(x)}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$. I a infinit, una asymptota horitzontal, cosa que es veu fent l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0^+,$$

o bé argumentant que, per a $x > e$ la funció és sempre decreixent, però no travessa mai l'eix d'abscisses, ja que $2 \frac{\ln x}{x} = 0$ només té la solució $x = 1$. Aquest és un esbós de la gràfica d'aquesta funció:





Proves d'accés a la Universitat 2024, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació

c)

[0,5 punts]

Com que $f(1) = 2 \frac{\ln 1}{1} = 0$ i $f'(1) = 2 \frac{1-\ln 1}{1^2} = 2$, es tracta de la recta que passa pel punt (1,0) i té pendent 2: és la recta $y - 0 = 2(x - 1) \rightarrow y = 2x - 2$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 pel càlcul de la derivada, 0,25 per determinar el màxim i 0,25 per les zones de creixement i decreixement. (b) Compteu 0,25 per l'asímtota vertical, 0,5 per l'horitzontal i 0,25 per l'esbós de la gràfica. (c) Compteu 0,5 pel càlcul correcte de la recta tangent.

Comentari: Si justifiquen l'existència de l'asímtota horitzontal sense calcular el seu valor (per exemple, dient que al tendir a infinit la funció és decreixent sense tallar mai l'eix d'abscisses), o fins i tot dient que és 0 sense justificar, compteu la totalitat dels 0,5 punts corresponents (l'enunciat pregunta si $f(x)$ té asímtotes, no que les calculin).

2.

a)

[1 punt]

La matriu de coeficients i la matriu ampliada del sistema són:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad \overline{M} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & k & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculant el determinant de coeficients i igualant-lo a zero obtenim

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 6k - 3 - 12k = -6k - 6 = 0,$$

és a dir, $k = -1$. Per tant, si $k \neq -1$, tindrem $\text{rang}(M) = \text{rang}(\overline{M}) = 3$, que coincideix amb el nombre d'incògnites i, pel teorema de Rouché-Frobenius, el sistema és compatible determinat. En canvi, si $k = -1$, el sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y - z = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{array} \right\};$$

com que la tercera equació és la resta de la primera menys la segona, es tracta d'un sistema de dues equacions i tres incògnites, amb rang de coeficients 2 ja que $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$



Proves d'accés a la Universitat 2024, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació

$-4 - 2 = -6 \neq 0$. Per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

La solució per a $k = 0$ la podem calcular per la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-4 + 18 + 12 + 12 - 36 - 2}{-6} = 0.$$

b)

[0,75 punts]

Per al cas $k = -1$, i eliminant la tercera equació per ser redundant, obtenim

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y - z = 3 \end{array} \right\}$$

Restant, obtenim $3x + 3y = 1$. Fent $x = \lambda$, tenim $y = \frac{1}{3} - \lambda$ i llavors $z = x - y - 3 = \lambda - \frac{1}{3} + \lambda - 3 = 2\lambda - \frac{10}{3}$. Totes les solucions del sistema són, doncs, de la forma

$$(x, y, z) = \left(\lambda, \frac{1}{3} - \lambda, 2\lambda - \frac{10}{3} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

c)

[0,75 punts]

Com hem notat, en el cas $k = -1$, la tercera equació és redundant perquè és la resta de la primera menys la segona. Si modifiquem el terme independent posant, per exemple, $3x + 3y = 2$ tindrem la incongruència $1 = 2$ i el sistema serà incompatible.



Proves d'accés a la Universitat 2024, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació

Dit d'una altra manera, és incompatible perquè la matriu de coeficients no ha canviat, i té rang 2, mentre que ara la matriu ampliada té rang 3 ja que

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 9 + 12 - 2 = -3 \neq 0.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 pel determinant, 0,25 per la discussió i 0,5 per la solució del cas $k = 0$. (b) Compteu 0,75 per l'expressió paramètrica de totes les solucions. (c) Compteu 0,25 per la nova equació, i 0,5 per la justificació que ara és incompatible.

Comentari: La discussió del sistema i el càlcul de les solucions (tant per a $k = 0$ com per a $k = -1$ pot fer-se d'altres maneres. Compteu-ho bé en la mesura que el que fan sigui correcte i estigui ben justificat.

3.

a)

[1,25 punts]

Tal com es veu al dibuix, les abscisses dels punts $(0, 5)$, P , i Q són les tres solucions de l'equació $f(x) = 5$:

$$-x^3 + 7x^2 - 6x + 5 = 5 \rightarrow x(-x^2 + 7x - 6) = 0$$

$$x = 0, \quad x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{-2} = \begin{cases} 1 \\ 6 \end{cases}.$$

Per tant, les coordenades dels punts demanats són $P = (1,5)$, $Q = (6,5)$, i $R = (6,0)$.

Ara, la recta r que passa pels punts $P = (1,5)$ i $R = (6,0)$ té pendent $m = \frac{0-5}{6-1} = -1$, per tant és $y = -x + n$ i, com que passa pel punt $R = (6,0)$, tenim que $n = 6$; es tracta de la recta $y = -x + 6$.

b)

[1,25 punts]

La superfície del terreny serà la integral definida entre els punts d'abscissa $x = 1$ i $x = 6$ de la funció $f(x)$ menys la recta:



$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^6 (f(x) - r(x)) dx = \\
 &= \int_1^6 ((-x^3 + 7x^2 - 6x + 5) - (-x + 6)) dx = \\
 &= \int_1^6 (-x^3 + 7x^2 - 5x - 1) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x \right]_1^6 = \\
 &= \left(-\frac{6^4}{4} + \frac{7}{3}6^3 - \frac{5}{2}6^2 - 6 \right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{7}{3} - \frac{5}{2} - 1 \right) = \frac{1025}{12} = 85.416 \dots u^2.
 \end{aligned}$$

Alternativament, es pot integrar només $f(x)$ entre 1 i 6, i restar el triangle inferior no inclòs al terreny:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^6 f(x) dx - \frac{5 \cdot 5}{2} = \int_1^6 (-x^3 + 7x^2 - 6x + 5) dx - \frac{25}{2} = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7}{3}x^3 - 3x^2 + 5x \right]_1^6 - \\
 \frac{25}{2} &= \left(-\frac{6^4}{4} + \frac{7}{3}6^3 - 3 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 \right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{7}{3} - 3 + 5 \right) - \frac{25}{2} = \frac{1175}{12} - \frac{25}{2} = 85.416 \dots u^2.
 \end{aligned}$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 per plantejar bé l'equació, 0,25 per resoldre-la, 0,25 per donar les coordenades dels tres punts i 0,5 per l'equació de la recta. (b) Compteu 0,5 pel plantejament de la integral correcta i 0,75 per fer-ne el càlcul.

Comentaris: Compteu bé qualsevol de les maneres de fer-ho, si són correctes i estan ben explicades.

4.

a)

- Donat que hi ha dues A i una E, en la primera extracció tenim 3 casos favorables sobre 9 possibles; per tant, la probabilitat demanada és $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

[0,5 punts]

- Calculem primer la probabilitat que les dues boles siguin iguals. Això només pot passar si són dues A o dues S.

$$P(\text{dues A}) = P(\text{primera A i segona A}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{36} = P(\text{dues S}).$$

Per tant, $P(\text{dues diferents}) = 1 - P(\text{dues iguals}) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{17}{18} = 0.944 \dots$

Alternativament, podem argumentar directament de la manera següent: si la primera bola no és ni A ni S, segur que les dues seran diferents; si la primera bola és una A, hi ha 7 boles favorables per a la segona extracció (totes menys l'altra A); i



Proves d'accés a la Universitat 2024, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació

anàlogament, si la primera bola és una S, hi ha també 7 boles favorables per a la segona extracció. Per tant,

$P(\text{dues diferents})$

$$\begin{aligned} &= P(\text{primera no és ni A ni S}) + P(\text{primera A i segona no A}) \\ &\quad + P(\text{primera S i segona no S}) = \\ &= \frac{5}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{17}{18}. \end{aligned}$$

[0,75 punts]

b)

El nombre de boles A extretes segueix una llei binomial amb $n = 5$ i $p = \frac{2}{9}$.

- $P(\text{cap A}) = (1 - p)^5 = \left(\frac{7}{9}\right)^5 = 0.284 \dots$

[0,5 punts]

- (ii) Passant al complementari, tenim

$$\begin{aligned} P(\text{almenys 2 A}) &= 1 - P(\text{una A}) - P(\text{cap A}) = 1 - \binom{5}{1} \left(\frac{2}{9}\right) \left(\frac{7}{9}\right)^4 - \left(\frac{7}{9}\right)^5 = \\ &= 0.308 \dots \end{aligned}$$

[0,75 punts]

Criteris de correcció: (a) (i) Compteu 0,5. (ii) Compteu 0,5 pel plantejament i 0,25 pel càlcul. (b) (i) Compteu 0,5. (ii) Compteu 0,5 pel plantejament i 0,25 per fer-ne el càlcul.

Comentaris: És més llarg però l'apartat (b) (ii) es pot respondre també calculant amb la binomial $P(2A) + P(3A) + P(4A) + P(5A)$; doneu també aquestes respostes com a correctes en la mesura que estiguin ben fetes i ben argumentades.



5.

a)

[1,25 punts]

Com s'indica a l'enunciat, denotem per x la fondària del cobert, i denotem per h l'alçada; l'amplada serà $3x$. El volum del cobert ha de ser de 6 m^3 , és a dir, $3x \cdot x \cdot h = 6$ i per tant $h = \frac{2}{x^2}$. El cost de construcció és donat per

$$\begin{aligned} C(x) &= 30 \cdot (3xh + xh + xh) + 50 \cdot 3x^2 + 35 = 150xh + 150x^2 + 35 = \\ &= 150x \cdot \frac{2}{x^2} + 150x^2 + 35 = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35. \end{aligned}$$

b)

[1,25 punts]

Per minimitzar la funció $C(x)$, calculem la seva derivada:

$$C'(x) = \frac{-300}{x^2} + 300x$$

Si resollem l'equació $C'(x) = 0$ obtenim $\frac{300}{x^2} = 300x$ o, equivalentment, $x^3 = 1$, que té com a única solució real $x = 1$. Com que $C''(x) = \frac{600}{x^3} + 300$ i $C''(1) > 0$, comprovem fàcilment que es tracta d'un mínim de la funció. Així doncs, les dimensions del cobert han de ser $x = 1$ metre de fondària, $3x = 3$ metres d'amplada, i $h = \frac{2}{1^2} = 2$ metres d'alçada. Per a aquestes dimensions el cost de construcció és de $C(1) = \frac{300}{1} + 150 \cdot 1^2 + 35 = 485$ euros.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 pel plantejament correcte de les variables (amplada, fondària i alçada), 0,5 per expressar la lligadura que representa el volum fixat, i 0,5 per l'expressió final del cost. (b) Compteu 0,25 per la derivada, 0,25 per aïllar correctament, 0,25 per justificar que es tracta d'un mínim, 0,25 per les tres dimensions demanades i 0,25 pel càlcul del cost total.

Comentaris: Poden plantejar que l'amplada és x i la fondària $\frac{x}{3}$; els càlculs seran diferents però doneu els punts corresponents de cada part sempre que estigui ben feta i ben argumentada. La justificació que es tracta d'un mínim pot fer-se també sense la derivada segona, analitzant el signe de la derivada primera; compteu-ho bé si ho fan així, sempre que estigui ben argumentat.



6.

a)

[1 punt]

El pla buscat ha de ser perpendicular al vector $\overrightarrow{AB} = (-3, -2, 3) - (1, 2, 3) = (-4, -4, 0) \sim (1, 1, 0)$, per tant, té equació de la forma $x + y + 0z + D = 0$. A més, ha de passar pel punt mitjà $\frac{1}{2}(A + B) = (-1, 0, 3)$; per tant, $-1 + D = 0$ i es tracta del pla d'equació $x + y + 1 = 0$.

Geomètricament és clar que aquest pla π està format, precisament pels punts a igual distància de A que de B . Efectivament, per a un punt arbitrari $P = (x, y, z)$, l'equació $d(P, A) = d(P, B)$ és equivalent a

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2},$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9,$$

$$-2x + 1 - 4y = 6x + 9 + 4y,$$

$$-8x - 8y - 8 = 0$$

que simplificant-la és, precisament, l'equació del pla π , $x + y + 1 = 0$.

b)

[0,75 punts]

Usant la fórmula de la distància punt-pla, tenim

$$d(A, \pi) = \frac{|1+2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}, \quad d(B, \pi) = \frac{|-3-2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

No és casualitat que doni el mateix resultat: les projeccions ortogonals de A i de B al pla π són, precisament el punt mitjà $\frac{1}{2}(A + B) = (-1, 0, 3)$ per on hem fet passar el pla π , perpendicular al vector \overrightarrow{AB} .

c)

[0,75 punts]

El punt $C = (-7, 6, 3)$ compleix $-7 + 6 + 1 = 0$ i per tant pertany al pla π de l'apartat anterior. Això vol dir que $d(C, A) = d(C, B)$ i, per tant, el triangle ABC té almenys dos costats iguals; per tant, és isòsceles.



Proves d'accés a la Universitat 2024, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació

Per calcular la seva àrea només necessitem la longitud de la base $d(A, B) = 2 \frac{4}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$, i la seva alçada, que és la distància de C al punt mitjà entre A i B :

$$h = d((-7, 6, 3), (-1, 0, 3)) = \sqrt{6^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Per tant el triangle ABC té àrea

$$\text{Àrea} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 24 \text{ u}^2.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 per calcular l'equació del pla π , i 0,5 per justificar que es tracta exactament dels punts equidistants d' A i de B . (b) Compteu 0,25 per calcular les dues distàncies, i 0,5 per reconèixer que no és casualitat i explicar el motiu pel qual són iguals. (c) Compteu 0,25 per raonar que el triangle és isósceles, 0,25 per calcular l'alçada, i 0,25 per calcular la longitud de la base i l'àrea final.

Comentaris: Poden argumentar que el triangle és isósceles calculant directament la longitud dels tres costats i veient que dues coincideixen; compteu-ho bé si ho fan així, en la mesura que el que facin sigui correcte i estigui ben argumentat.