SÈRIE 3

1.

a) Primer, ens demanen el valor de la funció el dia 45:

$B(45) = -2.325$, per tant aquest dia l'empresa té unes pèrdues de 2.325 euros.

Hem de saber ara quins dies l'empresa ha tingut uns beneficis de 4000 euros. Per tant, hem de trobar els valors de x per als quals

$$B(x) = 4000 \rightarrow -x^2 + 260x - 12000 = 4000 \rightarrow x^2 - 260x + 16000 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{260 \pm \sqrt{3600}}{2}$$

que té dues solucions, $x = 100$ i $x = 160$. Per tant, els dies 100 i 160 ha tingut un benefici de 4000 €.

b) Per trobar el màxim, comencem calculant la derivada de la funció que ens dona els beneficis

$$B'(x) = -2x + 260$$

Igualant-la a zero, trobem un extrem relatiu en $x = 130$. Observem que en aquest punt hi ha un màxim perquè la funció $B'(x)$ és positiva per a valors inferiors a $x = 130$ i, per tant, la funció $B(x)$ és creixent, i $B'(x)$ és negativa per a valors superiors a $x = 130$ i, per tant, $B(x)$ és decreixent.

Els beneficis aquest dia seran de $B(130) = 4900$ euros.

Per tant, el dia 130 l'empresa té el benefici màxim i aquest benefici és de 4900 euros.

Sabem que l'empresa no té pèrdues si $B(x) \geq 0$. Si resolem l'equació B(x) = 0 obtenim

$$-x^2 + 260x - 12000 = 0 \rightarrow x = \frac{260 \pm \sqrt{19600}}{2}$$

que té per solucions $x = 60$ i $x = 200$. Observem, substituint en un punt intermedi com, per exemple, el valor en $x = 130$ que ja hem calculat abans, que la paràbola és positiva entre aquests dos valors. Per tant, l'empresa no ha tingut pèrdues entre els dies 60 i 200.

Criteris de correcció:

a) Trobar les pèrdues del dia 45: 0,5 punts. Trobar els dos dies que el benefici ha estat de 4.000 euros: 0,5 punts.

b) Calcular la derivada: 0,25 punts. Trobar el punt crític: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Calcular el benefici màxim: 0,25 punts. Calcular l'interval de dies entre els quals l'empresa no ha tingut pèrdues: 0,5 punts.

2.

a) Anomenem x, y i z la inversió en BTC, ETH i LNK, respectivament. Obtenim les dues equacions següents

$$\begin{cases} x = y + z \\ 1{,}15x + 1{,}1y + 1{,}13z = 1{,}13(x + y + z) \end{cases}$$

Si substituïm la primera igualtat en la segona equació obtenim

$$1{,}15(y + z) + 1{,}1y + 1{,}13z = 1{,}13(y + z + y + z)$$
$$2{,}25y + 2{,}28z = 2{,}26y + 2{,}26z; \quad -0{,}01y = -0{,}02z; \quad y = 2z$$

Per tant, la inversió en ETH ha de ser el doble que en LNK.

b) Si hi afegim la nova condició, obtenim el sistema

$$\begin{cases} x = y + z \\ 1{,}15x + 1{,}1y + 1{,}13z = 1{,}13(x + y + z) \\ x + y + z = 150000 \end{cases}$$

Si substituïm la primera relació en la tercera equació, obtenim

$$y + z + y + z = 150000; \quad 2y + 2z = 150000; \quad y + z = 75000$$

Si fem servir la relació obtinguda a l'apartat *a)*, obtenim

$$2z + z = 75000; \quad 3z = 75000; \quad z = \frac{75000}{3} = 25000;$$
$$y = 2z = 2 \cdot 25000 = 50000; \quad x = y + z = 50000 + 25000 = 75000$$

Per tant, la inversió és de 75000 € en BTC, 50000 € en ETH i 25000 € en LNK.

Criteris de correcció:

a) Assignació d'incògnites: 0,25 punts. Plantejament: 0,25 punts cada equació correcta. Trobar la relació entre ETH i LNK: 0,5 punts.

b) Escriure la nova equació: 0,25 punts. Resoldre el sistema: 0,5 punts. Escriure la inversió realitzada en cada criptomoneda: 0,5 punts.

3.

a) Si el volum ha de ser de 4 litres $=\ 4000\ cm^3$ tenim que $x^2 \cdot y = 4000$ i, per tant, $y = \frac{4000}{x^2}$.

b) La superfície de la caixa en cm^2 ve donada per l'expressió

$$S(x) = x^2 + 4x \cdot y = x^2 + 4x \cdot \frac{4000}{x^2} = x^2 + \frac{16000}{x}$$

Si calculem la derivada, obtenim

$$S'(x) = 2x - \frac{16000}{x^2}$$

Trobem els extrems relatius igualant a zero

$$2x - \frac{16000}{x^2} = 0 \rightarrow x^3 = 8000 \rightarrow x = 20$$

Comprovem que es tracta d'un mínim perquè la derivada $S'(x)$ és negativa per a valors inferiors a $x = 20$, i, per tant, $S(x)$ és decreixent, mentre que $S'(x)$ és positiva per a valors superiors a $x = 20$ i, per tant, $S(x)$ és creixent.

Hem obtingut, per tant, que el costat de la base x ha de mesurar 20 cm.
L'alçària de la caixa serà de

$$y = \frac{4000}{x^2} = \frac{4000}{20^2} = 10\ cm.$$

Finalment, la quantitat de cartró és la superfície de la caixa amb aquests valors $S = 20^2 + \frac{16000}{20} = 400 + 800 = 1200\ cm^2$.

Criteris de correcció:

a) Trobar l'expressió algebraica: 0,5 punts.

b) Trobar la funció que cal optimitzar: 0,25 punts. Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el mínim: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un mínim: 0,25 punts. Trobar l'alçària: 0,25 punts. Trobar la quantitat de cartró: 0,5 punts.

4.

a) Fem el producte

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 122 & 620 \\ 930 & 433 \\ 384 & 281 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 742 \\ 1363 \\ 665 \end{pmatrix}.$$

Clarament, la primera fila correspon al nombre total de menors de 18 anys que han anat al cinema aquella setmana, la segona al total de persones entre 18 i 65 anys i la tercera al total de majors de 65 anys.

Per la propietat associativa del producte de matrius, només cal trobar una matriu $C = (a \quad b \quad c)$ que multiplicada pel producte $A \cdot B$, que acabem de calcular, ens doni els ingressos totals per la venda d'entrades. Observem que

$$C \cdot A \cdot B = C \cdot (A \cdot B) = (a \quad b \quad c) \cdot \begin{pmatrix} 742 \\ 1363 \\ 665 \end{pmatrix} = 742 \cdot a + 1363 \cdot b + 665 \cdot c$$

I, per tant, per obtenir els ingressos totals és suficient definir $C = (a \quad b \quad c) = (5 \quad 8{,}5 \quad 6{,}5)$. Els ingressos totals de la setmana són 19618 euros.

b) Comencem calculant el producte C·D·B

$$C \cdot D \cdot B = (5 \quad 8{,}5 \quad 6{,}5)\begin{pmatrix} 84 & 23 \\ 338 & x \\ 256 & 408 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (5 \quad 8{,}5 \quad 6{,}5)\begin{pmatrix} 107 \\ 338 + x \\ 664 \end{pmatrix}$$
$$= 7724 + 8{,}5x$$

Sabem, d'altra banda, que el total d'ingressos ha estat de 12076 euros. Per tant, $7724 + 8{,}5x = 12076 \ \rightarrow 8{,}5\, x = 4352 \ \rightarrow x = 512$.

Així doncs, el valor que ens faltava, el nombre d'adults que van assistir a la segona pel·lícula aquella setmana, fou de 512 persones.

Criteris de correcció:

a) Càlcul del producte $A \cdot B$: 0,5 punts. Interpretació del producte obtingut: 0,25 punts. Obtenció de la matriu C: 0,5 punts. Càlcul dels ingressos: 0,25 punts.

b) Plantejament del problema: 0,5 punts. Càlcul del valor de x: 0,5 punts.

5.

Considerem els esdeveniments:

$A_1 =$ l'abonat utilitza la zona de piscina

$A_2 =$ l'abonat utilitza el gimnàs

$B_1 =$ l'individu està abonat en horari de matí

$B_2 =$ l'individu està abonat en horari de tarda

Sabem que $P(A_1) = 0{,}4$ i que $P(A_2) = 0{,}6$. Sabem també que $P(B_1|A_1) = 0{,}55$ i que $P(B_1|A_2) = 0{,}45$.

a) Aplicant la fórmula de les probabilitats totals tenim que

$$P(B_1) = P(B_1 \cap A_1) + P(B_1 \cap A_2) = P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_2)P(A_2).$$

Per tant,

$$P(B_1) = 0{,}55 \cdot 0{,}4 + 0{,}45 \cdot 0{,}6 = 0{,}49.$$

La probabilitat que estigui abonat en horari de matí és de 0,49.

b) Aplicant la fórmula de la probabilitat condicionada i la fórmula de Bayes,

$$P(A_1|B_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1)} = \frac{0{,}55 \cdot 0{,}4}{0{,}49} = 0{,}4490.$$

La probabilitat que utilitzi la zona de la piscina si sabem que està abonat en horari de matí és de 0,4490.

Criteris de correcció:

a) Assignació correcta d'esdeveniments i interpretació correcta de les probabilitats de l'enunciat: 0,5 punts. Fórmula de les probabilitats totals: 0,5 punts. Resultat de l'apartat: 0,25 punts.

b) Plantejament: 0,5 punts. Ús correcte de la fórmula de Bayes: 0,5 punts. Resultat: 0,25 punts.

6.

a) Tenim una mostra de mida $n = 10$. Calculem l'estimació puntual de la mitjana a partir de la mostra i obtenim que

$$\bar{x} = 32{,}3$$

D'altra banda, sabem que la desviació típica és $\sigma = 2$.

L'interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança $\gamma \epsilon (0{,}1)$, quan la variància σ^2 és coneguda s'obté a partir de la fórmula

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal (0,1), $P\left(-z_\gamma \leq Z \leq z_\gamma\right) = \gamma$.

Per tant, tenim que els extrems de l'interval són

$$\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 32{,}3 - 1{,}96 \frac{2}{\sqrt{10}} = 31{,}0604$$

i

$$\bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 32{,}3 + 1{,}96 \frac{2}{\sqrt{10}} = 33{,}5396$$

L'interval de confiança demanat és $[31'0604\,,\ 33'5396]$.

b) A partir del resultat anterior podem afirmar, amb una confiança del 95%, que la informació que proporciona l'empresa és errònia. Ja que, a partir de la mostra, amb una confiança del 95%, la mitjana hauria d'estar entre 31,0604 i 33,5396 minuts i, per tant, superior als 30 minuts que indica l'empresa.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de la mitjana: 0,5 punts. Fórmula de l'interval de confiança per a la mitjana: 0,5 punts. Resultat final: 0,5 punts.

b) Justificació correcta: 1 punt.