SÈRIE 5

1.

a) Si un paquet pesa 9,5 kg estem a la primera opció i, per tant, cal pagar:

$$2 \cdot 15 \; + \; 7{,}5 \cdot 12 \; = \; 120 \text{ €}.$$

Si un paquet pesa 13 kg estem en la segona de les opcions i, per tant, es paga:

$$11 \cdot 13 \; + \; 2 \cdot 15 \; = \; 173 \text{ €}.$$

La funció $f(x)$ que dona el preu en funció del pes és

$$f(x) = \begin{cases} 30 & 0 < \; x \leq 2 \\ 30 + 12(x-2) & 2 < x < 11 \\ 143 + 15(x-11) & 11 \leq x \leq 25 \end{cases}$$

Que simplificada queda

$$f(x) = \begin{cases} 30 & 0 < \; x \leq 2 \\ 6 + 12x & 2 < x < 11 \\ -22 + 15x & 11 \leq x \leq 25 \end{cases}$$

Hi ha dos punts del domini $x \in (0{,}25)$ en els que podria haver-hi una discontinuïtat, que són $x = 2$ i $x = 11$.

En el punt $x = 2$ observem que

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 30$ i $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 6 + 12 \cdot 2 = 30$

i, per tant, la funció és contínua en aquest punt.

En canvi, en el punt $x = 11$ observem que

$\lim_{x \to 11^-} f(x) = 6 + 12 \cdot 11 = 138$ i $\lim_{x \to 11^+} f(x) = -22 + 15 \cdot 11 = 143$

i, per tant, la funció té una discontinuïtat en aquest punt.

b) Per saber quants quilos hem enviat busquem l'antiimatge de 162.

Si ens fixem en els límits que hem calculat i que la funció és creixent en els darrers dos trossos de definició observem que el pes ha de ser més gran de 11 kg, per tant buscarem l'antiimatge en aquest tros:

$-22 + 15x = 162 \; \to 15x = 184 \; \to x = \frac{184}{15} = 12{,}27$ kg.

Per tant tenim que el pes del paquet enviat era de 12,27 kg.

Criteris de correcció:

a) Càlcul del preu d'un paquet de 9,5 kg: 0,25 punts. Càlcul del preu d'un paquet de 13 kg: 0,25 punts. Obtenció de la funció general definida a trossos: 0,75 punts. Estudi de la continuïtat: 0,5 punts.

b) Plantejament de l'equació: 0,25 punts. Resolució: 0,5 punts.

2.

a) Anomenem x, y i z els preus de la maleta petita, de la maleta mitjana i de la maleta gran, respectivament. En tots els casos, es tracta del preu sense descompte.
A partir de la informació s'obtenen les següents relacions:

$$\begin{cases} x+y+z = 240 \\ x+y-z=0 \\ 0.9(2x+y+z)=256{,}5 \end{cases}$$

Que correspon a

$$\begin{cases} x+y+z = 240 \\ x+y-z=0 \\ 1{,}8x+0{,}9y+0{,}9z=256{,}5 \end{cases}$$

I si multipliquem la tercera equació per 10 tenim

$$\begin{cases} x+y+z = 240 \\ x+y-z=0 \\ 18x+9y+9z=2565 \end{cases}$$

El podem resoldre pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 240 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 18 & 9 & 9 & 2565 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 240 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 285 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 240 \\ 0 & 0 & 2 & 240 \\ 0 & 1 & 1 & 195 \end{array}\right)$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 240 \\ 0 & 1 & 1 & 195 \\ 0 & 0 & 1 & 120 \end{array}\right)$$

Obtenim per tant que $z = 120$, $y = 195 - 120 = 75$ i, finalment, $x = 240 - 120 - 75 = 45$.

Per tant, el preu de la maleta petita és de 45 euros, el de la maleta mitjana és de 75 euros i el de la gran és de 120 euros.

Criteris de correcció:

Assignació d'incògnites: 0,25 punts. Plantejament: 0,25 punts cada equació correcta. Resolució del sistema: 0,75 punts. Trobar el preu de cada maleta: 0,75 punts.

3.

a) Considerem $I(x)$ la funció que determina els ingressos en funció de x i $D(x)$ la funció que determina les despeses també en funció de x. Aleshores la funció, $B(x)$, que determina els beneficis obtinguts serà:

$$B(x) = I(x) - D(x)$$

De l'enunciat deduïm que si el preu del lloguer de cada vehicle és de $50 + x$ el nombre de vehicles que es lloguen és $250 - 2x$. Per tant, els ingressos en funció de x seran

$$I(x) = (50 + x)(250 - 2x) = -2x^2 + 150x + 12500$$

I les despeses

$$D(x) = 250 - 2x$$

Finalment, la funció que ens dona els beneficis en funció de x serà

$$B(x) = -2x^2 + 150x + 12500 - (250 - 2x) = -2x^2 + 152x + 12250$$

b) Per trobar el valor òptim del preu de lloguer diari de cada vehicle, caldrà trobar el màxim de la funció $B(x)$. Per això comencem calculant la derivada i mirarem per quins punts s'anul·la:

$$B'(x) = -4x + 152;\ -4x + 152 = 0 \Rightarrow x = 38$$

Cal comprovar que efectivament el valor $x = 38$ correspon a un màxim. Observem que $B'(x) > 0$ per valors inferiors a $x = 38$ i, per tant, $B(x)$ és creixent, mentre que $B'(x) < 0$ per valors més grans que $x = 38$ i, per tant, $B(x)$ és decreixent. Així doncs, en $x = 38$, s'assoleix un màxim.

De manera que el preu òptim al que cal llogar cada vehicle diàriament si es vol aconseguir que l'empresa obtingui el benefici màxim serà de $50 + 38 = 88$ €.

El benefici màxim serà de $B(38) = -2(38)^2 + 152 \cdot 38 + 12250 = 15138$ €

Criteris de correcció

a) Determinar la funció que dona els ingressos en funció de x: 0,25 punts. Determinar la funció que dona les despeses en funció de x: 0,25 punts. Determinar la funció que dona els beneficis en funció de x: 0,5 punts.

b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Trobar el preu de lloguer: 0,25 punts. Obtenció del benefici màxim: 0,25 punts.

4.

a) Podem representar la informació que es dona a l'enunciat amb la següent taula:

	Noms personalitzats	Paraules decoratives	Baldufes
1r client	2	0	3
2n client	1	2	5
3r client	0	0	4

Per tant, la matriu demanada és:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Per trobar el que va facturar a cada client hem de fer el següent producte:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 86 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Per tant, la Laia va facturar 58 € al primer client, 86 € al segon i 24 € al tercer.

b) Per trobar el preu de venda de cada producte es pot plantejar el següent sistema d'equacions:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ 52 \\ 62 \end{pmatrix}$$

Aplicant el Mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 78 \\ 2 & 0 & 4 & 52 \\ 1 & 2 & 3 & 62 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 62 \\ 2 & 0 & 4 & 52 \\ 3 & 1 & 2 & 78 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 62 \\ 0 & 4 & 2 & 72 \\ 0 & 5 & 7 & 108 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 62 \\ 0 & 4 & 2 & 72 \\ 0 & 0 & -18 & -72 \end{array}\right)$$

S'obté $x = 18, y = 16$ i $z = 4$.

Per tant, durant el segon mes la Laia ven els noms personalitzats a 18€, les paraules decoratives a 16€ i les baldufes a 4 €.

Criteris de correcció:

a) Escriure la matriu de vendes: 0,5 punts. Interpretar quin és el producte de matrius que cal realitzar: 0,25 punts. Fer el producte: 0,5 punts. Solució final: 0,25 punts.

b) Plantejament del sistema: 0,25 punts. Resolució del sistema: 0,5 punts. Solució final: 0,25 punts.

5.

Considerem els esdeveniments:

$A_1 =$ el client escull el menú del dia

$A_2 =$ el client escull un plat combinat

$B_1 =$ el client pren cafè

Sabem que $P(A_1) = 0{,}6$ i que $P(A_2) = 0{,}4$. Sabem també que $P(B_1|A_1) = 0{,}75$ i que $P(B_1|A_2) = 0{,}5$.

a) Aplicant la fórmula de les probabilitats totals tenim que

$$P(B_1) = P(B_1 \cap A_1) + P(B_1 \cap A_2) = P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_2)P(A_2).$$

Per tant,

$$P(B_1) = 0{,}75 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}65.$$

La probabilitat que el client prengui cafè és de 0,65.

b) Aplicant la fórmula de la probabilitat condicionada i la fórmula de Bayes,

$$P(A_1|B_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1)} = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}6}{0{,}65} = 0{,}6923.$$

La probabilitat que hagi escollit el menú del dia si sabem que ha pres cafè és de 0,6923.

Criteris de correcció:

a) Assignació correcta d'esdeveniments i interpretació correcta de les probabilitats de l'enunciat: 0,5 punts. Fórmula de les probabilitats totals: 0,5 punts. Resultat de l'apartat: 0,25 punts.

b) Plantejament: 0,5 punts. Ús correcte de la fórmula de Bayes: 0,5 punts. Resultat: 0,25 punts.

6.

a) Tenim una mostra de mida $n = 175$. Sabem que l'estimació puntual de la mitjana a partir de la mostra és $\bar{x} = 90$ i que la desviació típica mostral és $S = 7$.

L'interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança $\gamma \epsilon (0,1)$, quan la variància σ^2 és desconeguda i la mostra és gran ($n \geq 30$) s'obté a partir de la fórmula

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}\right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal (0,1), $P\left(-z_\gamma \leq Z \leq z_\gamma\right) = \gamma$.

Per tant tenim que els extrems de l'interval són

$$\bar{x} - z_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 90 - 1{,}96 \frac{7}{\sqrt{175}} = 88{,}9629$$

i

$$\bar{x} + z_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 90 + 1{,}96 \frac{7}{\sqrt{175}} = 91{,}0371$$

L'interval de confiança demanat és [88,9629 , 91,0371].

b) Amb una confiança del 99% els extrems de l'interval seran

$$\bar{x} - z_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 90 - 2{,}58 \frac{7}{\sqrt{175}} = 88{,}6348$$

i

$$\bar{x} + z_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 90 + 2{,}58 \frac{7}{\sqrt{175}} = 91{,}3652$$

L'interval de confiança demanat és [88,6348 , 91,3652].

Els dos intervals són diferents perquè els nivells de confiança són diferents. Com és natural, en el segon cas que el nivell de confiança és més gran, l'interval que obtenim és també més gran. Tenim una confiança més gran que el valor real de la mitjana estarà entre els dos valors obtinguts però l'interval és més gran.

Criteris de correcció:

a) Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 0,5 punts. Resultat final: 0,5 punts.

b) Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 0,5 punts. Resultat final: 0,5 punts. Justificació correcta: 0,5 punts.