Sèrie 2

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Criteris generals per a la correcció:

1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.**
2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
3. En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.
5. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**
   - Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
   - En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i la coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.
   - En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.
   - Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

1. Resolució:

a) $(A-2I)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$

b) $(A-2I)^2 = 3I \leftrightarrow A^2 - 4A + 4I = 3I \leftrightarrow A^2 - 4A = -I \leftrightarrow 4A - A^2 = I$ i traient factor comú d'A: $(4I - A) \cdot A = I \leftrightarrow \boxed{A^{-1} = 4I - A}$

$$\boldsymbol{A^{-1}} = 4I - A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}$$

c) De $A \cdot X = B$, aïllant la matriu, multiplicant per la inversa d'A per l'esquerra:

$A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1} \cdot B$, com $A^{-1} = B$, $(A^{-1} \cdot A)X = B \cdot B \leftrightarrow \boxed{X = B^2}$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}}$$

Observació: El càlcul de la matriu X es pot plantejar també en termes d'un sistema d'equacions lineals. La puntuació serà la mateixa repartida en els diferents passos de la resolució.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per plantejar correctament la comprovació.
0,25 punts per fer bé el càlculs.

b) 0,25 punts pel càlcul del quadrat.
0,25 punts per la factorització.
0,25 punts per les operacions matricials.
0,25 punts per l'expressió de la matriu inversa.
0,25 punts pel càlcul de la matriu inversa i veure que coincideix amb *B*.

c) 0,5 punts per aïllar correctament i aplicar el resultat de l'apartat b).
0,25 punts pel càlcul de la matriu *X*.

2. Resolució:

a) $f(x) = {}^{1}/_{x}$ $\qquad f'(x) = {}^{-1}/_{x^2}$,

Punt per on passa la recta, $(2, f(2)) = (2\,, {}^{1}/_{2})$
Pendent de la recta $= f'(2) = {}^{-1}/_{4}$

$$y - \frac{1}{2} = \left(\frac{-1}{4}\right)\cdot(x-2) \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{-1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Per tant, la recta tangent és $\boxed{y = \frac{-1}{4}x + 1}$

b) $f(x) = {}^{1}/_{x}$ $\qquad f'(x) = {}^{-1}/_{x^2}$

Punt per on passa la recta, $(k, f(k)) = \left(k\,, {}^{1}/_{k}\right)$
Pendent de la recta $= f'(k) = {}^{-1}/_{k^2}$

$$y - \frac{1}{k} = \left(\frac{-1}{k^2}\right)\cdot(x-k) \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2}$$

Per tant, la recta tangent és $\boxed{y = \frac{-1}{k^2}x + \frac{2}{k}}$.

c) Calculem el punt de tall de la recta tangent $y = \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2}$ amb l'eix d'abscisses:

$$\begin{cases} y &= \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2} \\ y &= 0 \end{cases} \qquad \text{Tall amb l'eix d'abscisses} = (2k\,,\ 0)$$

Punt de tall de la recta tangent $y = \frac{-x}{k^2} + \frac{2}{k}$ amb l'eix d'ordenades:

$$\begin{cases} y &= \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2} \\ x &= 0 \end{cases} \qquad \text{Tall amb l'eix d'ordenades} = \left(0\,,\ \frac{2}{k}\right)$$

$$\text{Àrea del triangle} = \frac{1}{2}\cdot 2k \cdot \frac{2}{k} = 2\ u^2$$

El triangle té àrea constant igual a 2 unitats de superfície, per a qualsevol valor del paràmetre k.

Pautes de correcció:

a) 0,25 per trobar el punt.
0,25 per trobar el pendent.
0,25 per trobar la recta tangent.

b) 0,25 punts per trobar el punt.
0,25 per trobar el pendent.
0,25 per trobar la recta tangent (en funció de k).

c) 0,25 per trobar el punt de tall amb l'eix de les abscisses.
0,25 per trobar el punt de tall amb l'eix de les ordenades.
0,25 per trobar el valor de l'àrea.
0,25 per expressar que l'àrea és constant per a qualsevol valor del paràmetre k.

3. Resolució:

a) El sistema en la forma normal és $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + my + z = 2 \\ 3x + y - mz = 3 \end{cases}$. Calculem el determinant de la matriu dels coeficients:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{vmatrix} = (-2m^2 - 1 + 3) - (-3m - m + 2) = -2m^2 + 4m = \boldsymbol{2m(2-m)}$$

$|A| = 0 \rightarrow m = 0$ i $m = 2$, són els valors a tenir en compte en la discussió.

Tenim tres casos a discutir:

- Si $\boldsymbol{m \neq 0}$ **i** $\boldsymbol{m \neq 2}$, com el $rang(A) = 3$ $[|A| \neq 0]$ $= rang(A^*) =$ nombre d'incògnites, tenim un **SCD** (Sistema Compatible Determinat). **Solució única.**

- Si $\boldsymbol{m = 0}$, per Gauss obtenim:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} f_2 \\ f_1 \\ f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ 2f_1 - f_2 \\ 3f_1 - f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ f_3 - f_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rang(A) = 2 = rang(A^*) < 3 =$ nombre d'incògnites.

Per tant, es tracta d'un SCI (Sistema Compatible Indeterminat) amb $(3 - 2 = 1)$ un grau de llibertat. Infinites solucions que depenen d'un paràmetre.

- Si $\boldsymbol{m = 2}$, per Gauss obtenim:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} f_2 \\ f_1 \\ f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ 2f_1 - f_2 \\ 3f_1 - f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ f_3/3 \\ 3f_3 - 5f_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$rang(A) = 2 \neq rang(A^*) = 3 \Rightarrow$ $\boxed{\text{SI (Sistema Incompatible). No hi ha solució.}}$

b) Si $\boldsymbol{m = 1}$, quan substituïm en el sistema obtenim:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} f_2 \\ f_1 \\ f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ 2f_1 - f_2 \\ 3f_1 - f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ f_3 - 2f_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ y+3z=3 \\ 2z=3 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} x-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}=2 \\ y+3\cdot\dfrac{3}{2}=3 \\ z=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{c} x=2 \\ y=-3/2 \\ z=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.}$$

Observació: L'apartat a) es pot resoldre via el càlcul de rangs i l'apartat b) es pot resoldre també pel mètode de Cramer.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel plantejament matricial i el determinant de la matriu de coeficients.
0,25 punts pel càlcul dels valors singulars.
0,75 punts per la discussió (0,25 punts per cada cas).

b) 0,25 punts per la substitució del paràmetre.
0,25 punts pel procediment de resolució.
0,75 punts per la resolució (0,25 punts per cada variable).

4. Resolució:

a) Que l'equació $f(x) = 2$ tingui alguna solució és equivalent que la funció $g(x) = f(x) - 2$ tingui algun zero.

La funció $g(x)$ és una funció contínua a l'interval $[-1, 0]$, ja que és suma de dues funcions contínues (una funció polinòmica -exactament una funció lineal- i una funció exponencial).

D'altra banda podem comprovar que

$g(-1) \cdot g(0) = (3 + e^{-3} - 2)(0 + e^{-1} - 2) = (1 + e^{-3})(e^{-1} - 2) < 0,$

per tant podem aplicar el teorema de Bolzano i afirmar que la funció té un zero a l'interval $(-1, 0)$.

b) Calculem els punts de tall entre les dues funcions:

$$f(x) = h(x)$$

$$-3x + e^{2x^3-1} = -3x^2 + e^{2x^3-1}$$

$$-3x = -3x^2$$

$$-3x + 3x^2 = 3x(x - 1) = 0$$

Hi ha, per tant, dues solucions: $x = 0$ i $x = 1$.

$$A = \left|\int_0^1 (h(x) - f(x))\ dx\right| = \left|\int_0^1 ((-3x^2 + e^{2x^3-1}) - (-3x + e^{2x^3-1}))\ dx\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 (-3x^2 + 3x)\ dx\right| = \left|\left[-x^3 + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1\right| = \boxed{\frac{1}{2}u^2}.$$

Observació: També es pot comprovar que la funció $h(x)$ està per sobre de la funció $f(x)$ a l'interval $(0, 1)$ i calcular directament l'àrea amb $A = \int_0^1 (h(x) - f(x))\, dx$.

Pautes de correcció:

a) 0,5 punts per explicitar que la funció és contínua per a poder aplicar el teorema de Bolzano.
0,5 punts per comprovar que als extrems de l'interval la funció pren signes diferents.
0,25 punts per aplicar el teorema de Bolzano i concloure l'existència d'una solució.

b) 0,25 punts per trobar els punts de tall de les dues funcions.
0,25 punts pel plantejament de la integral.
0,25 punts pel càlcul de la primitiva.
0,25 punts per l'aplicació de la regla de Barrow.
0,25 punts pel càlcul final.

5. Resolució:

a) A partir de les equacions contínues de l'enunciat podem escriure les rectes r_1 i r_2 en forma vectorial i paramètrica:

$$r_1: (x, y, z) = (1,0,0) + \lambda\,(1,1,-1) = (1 + \lambda\,, \lambda, -\lambda\,)$$
$$r_2: (x, y, z) = (0,0,0) + \mu\,(1,1,1) = (\mu, \mu, \mu\,)$$

Un vector qualsevol $\overrightarrow{A_1A_2}$ format en prendre $A_1 \in r_1$, $A_2 \in r_2$ vindrà expressat en termes de $\overrightarrow{A_1A_2} = (\mu - \lambda - 1,\ \mu - \lambda,\ \mu + \lambda\,)$ amb $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$.

La recta que passi per A_1 i A_2 tallarà r_1 i r_2 perpendicularment si el vector $\overrightarrow{A_1A_2}$ és perperndicular als vectors directors de cada recta, és a dir si es compleixen les condicions següents:

$$\overrightarrow{A_1A_2} \perp (1,1,-1) \rightarrow (\mu - \lambda - 1, \mu - \lambda, \mu + \lambda\,) \cdot (1,1,-1) = 0$$
$$\overrightarrow{A_1A_2} \perp (1,1,1) \rightarrow (\mu - \lambda - 1, \mu - \lambda, \mu + \lambda\,) \cdot (1,1,1) = 0.$$

Efectuant els dos productes escalars les condicions anteriors es converteixen en el sistema d'equacions:

$$\mu - 3\lambda - 1 = 0$$
$$3\mu - \lambda - 1 = 0$$

Si a la segona equació li restem 3 vegades la primera obtenim $8\lambda = -2$ i per tant $\lambda = \frac{-1}{4}$, i quan substituïm en la primera obtenim $\mu = 1 + 3\lambda = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.
Així els punts respectius de cada recta són: $A_1 = \left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ i $A_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

La recta que uneix aquests punts és la perpendicular que talla totes dues rectes i tindrà vector director $\overrightarrow{A_1A_2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \approx (-1,1,0)$ i equació vectorial

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + \alpha\,(-1,1,0)$$

I, per tant, l'equació paramètrica serà

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{1}{4} - \alpha, \frac{1}{4} + \alpha, \frac{1}{4}\right), amb\ \alpha \in \mathbb{R}}$$

b) Aplicant l'apartat anterior tenim que

$$d\,(r_1, r_2) = d\,(A_1, A_2) = \left\|\overrightarrow{A_1A_2}\right\| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\,u}.$$

Observació: Amb independència de l'apartat a) aquest apartat b) es pot resoldre aplicant sigui la fórmula general per a la distància entre dues rectes o bé via la distància entre una recta i llur projecció perpendicular sobre l'altra.

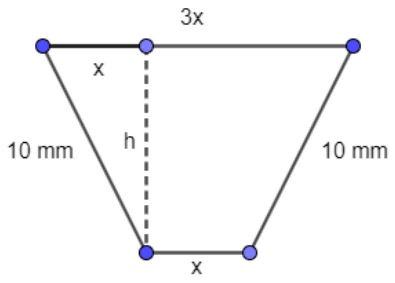
Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per les expressions de r_1 i r_2 .
0,25 punts pel vector $\overrightarrow{A_1A_2}$.
0,5 punts per la condició doble perpendicularitat.
0,5 punts pel càlcul de A_1 i A_2.
0,25 punts per l'equació de la recta final.

b) 0,25 punts pel plantejament de la distància entre les rectes.
0,5 punts pel càlcul de la distància

6. Resolució:

a) A partir de la situació exposada tenim el gràfic següent:



Pel teorema de Pitàgores s'obté que $x^2 + h^2 = 10^2$, i per tant $\boxed{h = \sqrt{100 - x^2}}$

b) L'àrea del trapezi és $A(x) = (x + 3x)/2 \cdot h = 2x \cdot \sqrt{100 - x^2}$

Per a trobar els candidats a valors que fan màxima aquesta àrea calcularem la funció derivada $A'(x)$ i obtindrem les solucions de l'equació $A'(x) = 0$.

$$A'(x) = 2 \cdot \sqrt{100 - x^2} + 2x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{100 - x^2}} (-2x)$$
$$= 2 \cdot \sqrt{100 - x^2} + \frac{-2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{2(100 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{200 - 4x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$
$$= \frac{4(50 - x^2)}{\sqrt{100 - x^2}}$$

Per tant tindrem $A'(x) = 0$ quan $50 - x^2 = 0$, és a dir $x^2 = 50$ i $x = \pm\sqrt{50} = \pm 5\sqrt{2}$ ≈±7'07

A partir del context de l'enunciat, l'únic candidat és el valor positiu $x = \sqrt{50} = 7'07$ mm. Ara cal comprovar que amb aquest valor l'àrea sigui màxima. Això es comprova veient que per valors propers l'àrea és més petita:

A(7)= 99'980

A($\sqrt{50}$) = 2· $\sqrt{50}$ · $\sqrt{100 - 50}$ = 2·$\sqrt{50}$ · $\sqrt{50}$ =100

A(7'1)=99.9966

Per tant, el valor de la base petita que fa l'àrea màxima és de $5\sqrt{2} = 7'07$ mm i el valor de l'àrea és 100 mm^2

Observació: Per a la comprovació de la condició de màxim es podria també fer servir, alternativament, el comprovar que la derivada segona de la funció àrea és negativa per al valor $x = \sqrt{50}$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per l'aplicació del teorema de Pitàgores.
0,25 punts per l'expressió final.

b) 0,25 punts per la formulació de l'àrea del trapezi.
0,25 punts per l'expressió de l'àrea en funció de x.
0,5 punts per la derivada de la funció.
0,25 punts pel càlcul del punt singular.
0,5 punts per l'avaluació de la condició de màxim relatiu.
0,25 punts pel càlcul de l'àrea màxima.