



## SÈRIE 2

1.

- a) Si anomenem  $x$  el nombre de persones que han practicat esquí aquàtic,  $y$  el nombre de persones que han practicat caiac i  $z$  el nombre de persones que han practicat moto aquàtica obtenim les equacions següents:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 45 \\40x + 20y + 60z &= 1700 \\x &= 3y\end{aligned}$$

- b) Dividim la segona equació per 20 i obtenim el sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites següent:

$$\begin{cases}x + y + z = 45 \\2x + y + 3z = 85 \\x - 3y = 0\end{cases}$$

Resolem el sistema pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 45 \\2 & 1 & 3 & 85 \\1 & -3 & 0 & 0\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 45 \\0 & 1 & -1 & 5 \\0 & 4 & 1 & 45\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 45 \\0 & 1 & -1 & 5 \\0 & 0 & 5 & 25\end{array}\right)$$

Per tant, tenim que  $5z = 25$ , és a dir,  $z = 5$ ,  $y - 5 = 5$ , per tant  $y = 10$  i, finalment,  $x + 10 + 5 = 45$ , és a dir,  $x = 30$ .

Així doncs 30 persones han fet esquí aquàtic, 10 han fet caiac i 5 moto aquàtica.

Criteris de correcció:

a) Assignació d'incògnites: 0,25 punts. Plantejament: 0,25 punts cada equació correcta.

b) Procediment de resolució del sistema: 1 punt. Obtenció del resultat correcte de les tres incògnites: 0,5 punts.



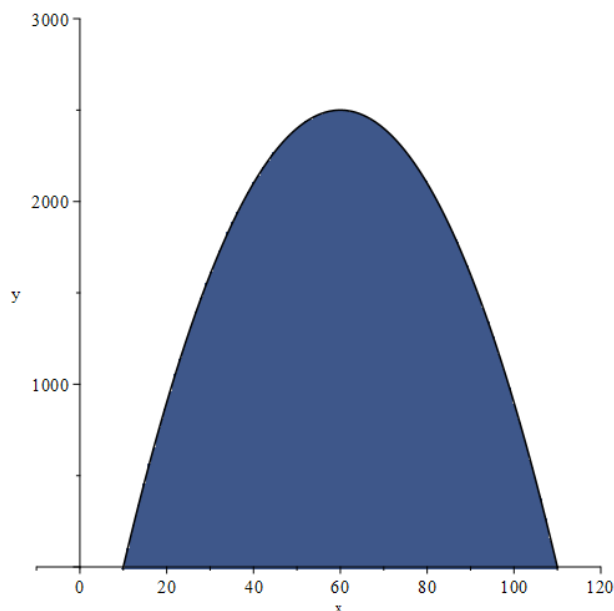
2.

- a) Els beneficis de l'empresa venen donats per la diferència entre els ingressos per les vendes i les despeses de producció:

$$f(x) = 35000x - (x^2 + 34880x + 1100) = -x^2 + 120x - 1100$$

Per saber quan la fàbrica no té pèrdues hem de resoldre la inequació següent:

$$-x^2 + 120x - 1100 \geq 0$$



Comencem resolent l'equació  $-x^2 + 120x - 1100 = 0$ , que té per solucions  $x = 10$  i  $x = 110$ . Com que es tracta d'una paràbola amb el coeficient principal negatiu, la solució de la inequació és  $x \in [10,110]$ .

Per tant la producció ha d'estar entre 10 i 110 vehicles, ambdós inclosos, per tal de no tenir pèrdues.

- b) Per a obtenir el màxim igulem a zero la derivada de la funció que ens dona els beneficis:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x + 120 \\ -2x + 120 &= 0 \\ x &= 60 \end{aligned}$$

Per tal de justificar que es tracta d'un màxim podem fer servir la taula de monotonia:

|         |          |       |            |
|---------|----------|-------|------------|
|         | $[0,60)$ | 60    | $(60,110]$ |
| $f'(x)$ | Positiu  | Zero  | Negatiu    |
| $f(x)$  | Creixent | Màxim | Decreixent |



Per tant, cal fabricar 60 vehicles i el benefici obtingut serà de  $f(60) = 2500$  euros.

Criteris de correcció:

a) Trobar la funció que dona els beneficis: 0,5 punts. Resoldre l'equació: 0,5 punts. Justificar que la solució està entre 10 i 100: 0,25 punts.

b) Calcular la derivada: 0,5 punts. Trobar el punt crític: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Calcular el benefici màxim: 0,25 punts.



3.

- a) Denotem per  $x$  el nombre de caixes tipus  $A$  i per  $y$  el nombre de caixes tipus  $B$ . El sistema d'inequacions donat per les restriccions del problema és el següent:

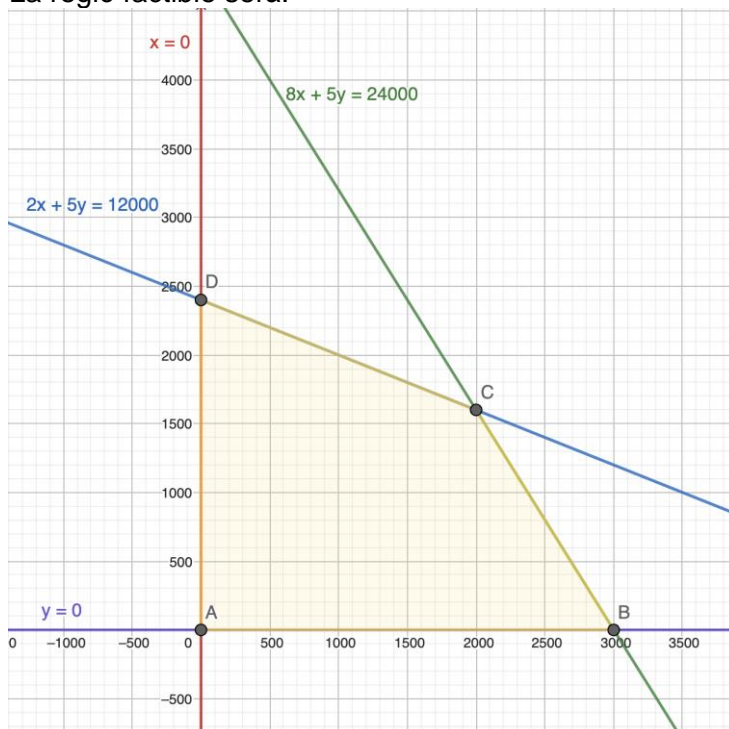
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 8x + 5y \leq 24000 \\ 2x + 5y \leq 12000 \end{cases}$$

Els ingressos per la venda d'una caixa del tipus  $A$  és:  $8 \cdot 0,60 + 2 \cdot 0,70 = 6,2$  €, i els ingressos per la venda d'una caixa del tipus  $B$  és:  $5 \cdot 0,60 + 5 \cdot 0,70 = 6,5$  €.

Per tant, la funció objectiu, que ens dona els ingressos per la venda de les caixes, és:

$$F(x, y) = 6,2x + 6,5y$$

La regió factible serà:



- b) Els vèrtexs de la regió factible són:  $(0,0)$ ,  $(3000,0)$ ,  $(2000,1600)$  i  $(0,2400)$ . Si avaluem la funció objectiu als quatre vèrtexs obtenim:

$$F(0,0) = 0$$

$$F(3000,0) = 18600$$

$$F(2000,1600) = 22800$$

$$F(0,2400) = 15600$$



Per tant, els ingressos màxims s'obtenen venent 2.000 caixes del tipus  $A$  i 1.600 caixes del tipus  $B$  i són de 22.800 €.

**Criteris de correcció:**

a) Càlcul de les restriccions: 0,5 punts. Dibuix de la regió factible: 0,5 punts. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 punts.

b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 punts. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,5 punts. Obtenció del benefici màxim: 0,25 punts.



4.

- a) Per saber el nombre d'infectats les setmanes 1 i 2 hem de calcular:

$$f(1) = \frac{30}{1-2+4} = 10 \text{ milers d'infectats i}$$

$$f(2) = \frac{30 \cdot 2}{4-4+4} = 15 \text{ milers d'infectats.}$$

Per saber què passarà a llarg termini hem de calcular el límit

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t^2 - 2t + 4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t^2} = 0$$

Per tant, a llarg termini, la infecció desapareixerà.

- b) Per trobar on s'assoleix el màxim comencem calculant la derivada de la funció

$$f'(t) = \frac{120 - 30t^2}{(t^2 - 2t + 4)^2}$$

Si la igualem a zero obtenim com a possibles extrems  $t = -2$  (que no té sentit en el context del problema, ja que  $t \geq 0$ ) i  $t = 2$ .

Com que  $f'(1) > 0$ ,  $f'(3) < 0$  deduïm que el màxim nombre de malalts s'obté quan han passat dues setmanes. És un màxim absolut ja que la funció creix fins a  $t = 2$  i decreix a partir d'aquest valor.

El nombre d'infectats aquella setmana és de  $f(2) = 15$  milers de persones.

Criteris de correcció:

a) Càlcul del nombre d'infectats la primera i segona setmanes: 0,25 punts cadascun.

Càlcul del límit: 0,5 punts

b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,5 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del nombre d'infectats aquella setmana: 0,25 punts.



5.

- a) Fem el producte de la matriu  $A$  per ella mateixa i igualem el resultat a la matriu identitat:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 \\ 0 & 2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observem que cal que  $1 + 2a = 1$  i per tant  $a = 0$ .

- b) Per a  $a = -1$  fem els càlculs que ens demanen:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = -(-I) = I.$$

Per tant, d'aquesta última igualtat deduïm que  $A^{-1} = A^3 = -A$ .

D'altra banda,

$$A^{23} = A^{20} \cdot A^3 = (A^4)^5 \cdot A^3 = I \cdot A^3 = A^3 = -A.$$

Criteris de correcció:

a) Càlcul  $A^2$ : 0,5 punts. Trobar el valor de  $a$ : 0,5 punts.

b) Càlcul de  $A^2, A^3$  i  $A^4$ : 0,5 punts en total. Deduir el valor de  $A^{-1}$ : 0,5 punts. Deduir el valor de  $A^{23}$ : 0,5 punts.



6.

- a) Amb l'oferta 4×3 el cost de quatre ampolles d'aigua és

$$0,70 \cdot 3 = 2,10 \text{ euros.}$$

Per calcular el preu amb el descompte del 20% comencem calculant el preu normal sense descompte de 4 ampolles

$$0,70 \cdot 4 = 2,80 \text{ euros}$$

I ara restem al resultat un 20%

$$2,80 \text{ euros} - 0,20 \cdot 2,80 \text{ euros} = 2,24 \text{ euros}$$

Per tant, aquesta setmana li costaran 2,10 euros i la setmana vinent 2,24 euros.

Anomenem ara  $x$  el percentatge de descompte que cal aplicar al total de 2,80 euros per tal d'obtenir 2,10 euros. L'equació que modelitza aquesta situació és la següent:

$$2,80 \text{ euros} - 2,80 \cdot \frac{x}{100} \text{ euros} = 2,10 \text{ euros}$$

$$2,80 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 2,10$$

$$1 - \frac{x}{100} = \frac{3}{4}$$

$$x = 25$$

Per tant, caldria aplicar un descompte del 25% per igualar l'oferta 4×3.

- b) Per saber el descompte que caldria aplicar per igualar una oferta  $m \times (m - 1)$  igualem el cost d'ambdues promocions per obtenir el percentatge demanat:

$$0,70 \cdot m - 0,70 \cdot m \cdot \frac{x}{100} = 0,70 \cdot (m - 1)$$

$$0,70 \cdot m \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 0,70 \cdot m - 0,70$$

$$-0,70 \cdot m \cdot \frac{x}{100} = -0,70$$

Aïllant la  $x$  obtenim  $x = \frac{100}{m}$  que és el percentatge que buscàvem.





Criteris de correcció:

a) Càlcul del preu amb l'oferta  $4 \times 3$ : 0,25 punts. Càlcul del preu amb l'oferta del 20%: 0,25 punts. Plantejament de l'equació per a trobar el percentatge: 0,5 punts. Resolució de l'equació i trobar el percentatge que iguala l'oferta: 0,5 punts.

b) Plantejament de la nova equació: 0,5 punts. Resolució: 0,5 punts.